

Sintesi del capitolo

Per un sistema costituito da N punti materiali diversi, ciascuno di massa m_i (massa totale M) e posizione $\mathbf{r}_i$, il centro di massa (CM) è il punto che ha posizione:

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i$$

La sua velocità e accelerazione sono rispettivamente:

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{d\mathbf{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M} \sum m_i \mathbf{v}_i$$

$$\mathbf{a}_{CM} = \frac{d\mathbf{v}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M} \sum m_i \mathbf{a}_i$$

dove $\mathbf{v}_i$ e $\mathbf{a}_i$ sono rispettivamente la velocità e l'accelerazione dell' i -esimo punto.

Il centro di massa si muove come se fosse un punto materiale in cui è concentrata tutta la massa del sistema, soggetto alla risultante delle sole forze esterne ($\mathbf{F}_{est,tot}$). Il moto traslatorio di un sistema di punti, o di un corpo, è governato quindi dalla prima equazione cardinale della dinamica, ovvero:

$$\mathbf{F}_{est,tot} = M\mathbf{a}_{CM}$$

Un corpo rigido è definito come un sistema di punti materiali in cui le distanze relative tra due punti qualsiasi non variano mai.

Il momento di una forza è la grandezza fisica responsabile della variazione del moto rotatorio di un corpo, e tiene conto del punto di applicazione della forza al corpo. È definito come:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

dove $\mathbf{r}$ è la posizione di un punto scelto come polo. In modulo si ha:

$$M = rF \sin\theta$$

dove θ è l'angolo compreso tra $\mathbf{r}$ e $\mathbf{F}$.

Si ha equilibrio traslazionale di un corpo rigido quando la risultante delle forze esterne è nulla:

$$\sum \mathbf{F}_{est,i} = \mathbf{F}_{est,tot} = 0$$

Se inoltre la velocità iniziale del CM è nulla, il CM resta fermo e il corpo non trasla, ma può solo ruotare su se stesso.

Si ha equilibrio rotazionale di un corpo rigido quando la risultante dei momenti delle forze esterne è nulla:

$$\sum \mathbf{M}_i = \mathbf{M}_{tot} = 0$$

Se inoltre la velocità angolare iniziale è nulla (il corpo inizialmente non sta ruotando), il corpo continuerà a non ruotare.

Una leva è un corpo rigido che può ruotare attorno a un fulcro, sotto l'azione di una forza resistente (F_R) e una motrice (F_M), che hanno distanza dal fulcro b_R e b_M , rispettivamente. Affinché la leva sia in equilibrio, deve valere:

$$F_M b_M = F_R b_R$$

4 Sistemi di punti, corpo rigido e corpi elastici

Si definisce il guadagno di una leva come:

$$G = \frac{b_M}{b_R} = \frac{F_R}{F_M}$$

Se $G > 1$, la leva è vantaggiosa; se $G < 1$, la leva è svantaggiosa; se $G = 1$, la leva è indifferente.

Il momento d'inerzia di un corpo rigido quantifica la resistenza di un corpo a variare il proprio stato rotazionale. Per un insieme di N punti, ciascuno di massa m_i e distanza d_i dall'asse di rotazione, esso è definito come:

$$I = \sum_{i=1}^N m_i d_i^2$$

mentre per un corpo rigido continuo vale:

$$I = \int d^2 dm$$

Quando si applica un momento della forza $\mathbf{M}$ a un corpo rigido di momento d'inerzia I , si ottiene una rotazione con accelerazione angolare α data dalla seconda equazione cardinale della dinamica:

$$\mathbf{M} = I\alpha$$

L'energia cinetica rotazionale di un corpo rigido di momento d'inerzia I e velocità angolare ω è data da:

$$K_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Il momento angolare di un corpo rigido di momento d'inerzia I in rotazione rispetto a un certo polo con velocità angolare ω è dato da:

$$\mathbf{L} = I\omega$$

Se non ci sono momenti della forza esterni che agiscono sul sistema (o se la loro somma vettoriale è nulla), il momento angolare totale del sistema si conserva:

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f$$

Per un corpo rigido per cui il momento d'inerzia I non varia, significa che la velocità angolare ω rimane costante. Invece per un corpo che può cambiare forma, se il momento d'inerzia diminuisce, la velocità di rotazione aumenta e viceversa.

Un corpo solido si dice elastico se, a seguito dell'applicazione di una forza che ne ha indotto una deformazione, esso riprende la sua forma originale una volta rimosse le cause della deformazione (cioè una volta rimossa la forza). Per tali corpi vale la legge di Hooke generalizzata:

$$\frac{F}{A} = E \frac{\Delta L}{L_0}$$

dove F/A è detto sforzo (stress), $\Delta L/L_0$ è detto deformazione o stiramento (strain) e E è il modulo di Young.